۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\mathrm{Sin}\theta = \mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right)$$

$$\mathrm{Sin}\left(x + \frac{\pi}{۸}\right) = \mathrm{Cos}\left(x - \frac{۳\pi}{۸}\right) \Rightarrow ۲\,\mathrm{Sin}\left(x + \frac{\pi}{۸}\right) = ۱ \Rightarrow \mathrm{Sin}\left(x + \frac{\pi}{۸}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{۸} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x + \frac{\pi}{۸} = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{۶} - \frac{\pi}{۸} \\ x = \frac{۵\pi}{۶} - \frac{\pi}{۸} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} \pi - \frac{۲\pi}{۸} = \frac{۳\pi}{۴}$$

۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. از فرمول‌های ضرب به جمع و جمع به ضرب استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\frac{(\mathrm{Cos}\,۸x + \mathrm{Cos}\,۲x) - (\mathrm{Cos}\,۲x - \mathrm{Cos}\,۴x)}{۲\,\mathrm{Cos}\,۲x} = ۱$$

$$\frac{\mathrm{cox}\,۸x + \mathrm{Cos}\,۴x}{۲\,\mathrm{Cos}\,۲x} = ۱ \rightarrow \frac{۲\,\mathrm{Cos}\,۶x \times \mathrm{Cos}\,۲x}{۲\,\mathrm{Cos}\,۲x} = ۱ \Rightarrow \mathrm{Cos}\,۶x = ۱ \rightarrow ۶x = ۲k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{۳}$$

۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\mathrm{Cos}^۲\alpha\,\mathrm{Cos}^۲\beta - \mathrm{Sin}^۲\alpha\,\mathrm{Sin}^۲\beta}{\mathrm{Sin}^۲\alpha\,\mathrm{Cos}^۲\beta - \mathrm{Cos}^۲\alpha\,\mathrm{Sin}^۲\beta} = \frac{(\mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Cos}\beta + \mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Sin}\beta)(\mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Cos}\beta - \mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Sin}\beta)}{(\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}\beta + \mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Sin}\beta)(\mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}\beta - \mathrm{Cos}\beta\,\mathrm{Sin}\beta)}$$

$$= \frac{\mathrm{Cos}(\alpha - \beta)\,.\,\mathrm{Cos}(\alpha + \beta)}{\mathrm{Sin}(\alpha + \beta)\,.\,\mathrm{Sin}(\alpha - \beta)} = \cot(\alpha - \beta)\,.\,\cot(\alpha + \beta)$$

حال با توجه به داده‌های تست، مقدار عبارت را به‌دست می‌آوریم:

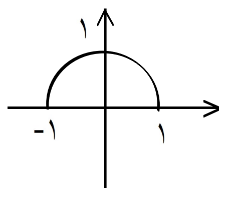
$$\left.\begin{array}{l} \tan(\alpha - \beta) = \frac{۳}{۴} \longrightarrow \cot(\alpha - \beta) = \frac{۴}{۳} \\ \alpha + \beta = ۱۳۵^\circ \longrightarrow \cot(\alpha + \beta) = \cot(۱۳۵^\circ) = -۱ \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \cot(\alpha + \beta)\,.\,\cot(\alpha - \beta) = \frac{۴}{۳(-۱)} = \frac{-۴}{۳}$$

۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\mathrm{Sin}^{-۱}x = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = x \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{۱ - x^۲}$$

اما چون $\mathrm{Sin}^{-۱}x$ در محدوده‌ی $\left[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right]$ قرار دارد پس $\cos\alpha = \sqrt{۱ - x^۲}$ صحیح است. نمودار تابع $y = \sqrt{۱ - x^۲}$ مربوط به یک نیم‌دایره به شعاع واحد و به مرکز مبدأ مختصات است.

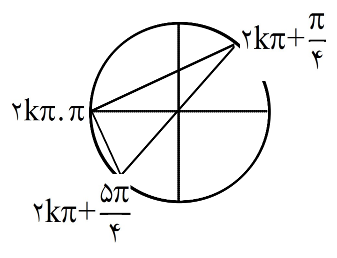


۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x}{۱ - \mathrm{Cos}\,x} = ۱ + \mathrm{Cos}\,x \Rightarrow \mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x = ۱ - \mathrm{Cos}^۲x$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Sin}^۲x \Rightarrow \mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Sin}\,x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Sin}\,x = ۰ \xrightarrow{\mathrm{Cos}\,x \neq ۱} \mathrm{Cos}\,x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \\ \mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Cos}\,x \Rightarrow \tan x = ۱ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$



۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$۳x + ۴ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -\frac{۴}{۳}$$

$$(۱)\quad -\frac{۴}{۳} \leq x < ۱ \Rightarrow \sqrt{۳x+۴} > -۲x + ۲ - x \xrightarrow[\text{۲ می رسانیم}]{\text{به توان}} ۳x + ۴ > ۹x^{۲} - ۱۲x + ۴$$

$$\Rightarrow ۹x^{۲} - ۱۵x < ۰ \Rightarrow ۰ < x < \frac{۵}{۳} \xrightarrow{\text{اشتراک با (۱)}} ۰ < x < ۱ \quad *$$

$$(۲)\quad x \geq ۱ \Rightarrow \sqrt{۳x+۴} > ۲x - ۲ - x \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان ۲}} ۳x + ۴ > x^{۲} - ۴x + ۴ \Rightarrow x^{۲} - ۷x < ۰$$

$$\Rightarrow ۰ < x < ۷ \xrightarrow{\text{اشتراک با (۲)}} ۱ \leq x < ۷ \; **$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع ** و *}} ۰ < x < ۷ \Rightarrow \text{طول وسط} = \frac{۷+۰}{۲} = \frac{۷}{۲}$$

۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(-۲) = ۰ \Rightarrow ۱۹ - ۸a + ۱۶ = ۰ \Rightarrow a = ۴$$

$$f(x) = x\left(x^{۳} + ۴x^{۲} - ۸\right)$$

$$\begin{array}{l|l} x^{۳} + ۴x^{۲} - ۸ & x + ۲ \\ \hline -x^{۳} - ۲x^{۲} & x^{۲} + ۲x - ۴ \\ \cancel{۲}x^{۲} - ۸ & \\ -\cancel{۲}x^{۲} - ۴x & \\ -۴x - ۸ & \\ +۴x + ۸ & \\ ۰ & \end{array}$$

$$x^{۲} + ۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow (x+۱)^{۲} = ۵ \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۵} - ۱ \\ x = -\sqrt{۵} - ۱ \end{cases}$$

کوچک ترین ریشه

۸- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$x(۵x + ۳) = ۲ \Rightarrow ۵x^{۲} + ۳x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{۳}{۵} \\ \alpha\beta = -\frac{۲}{۵} \end{cases}$$

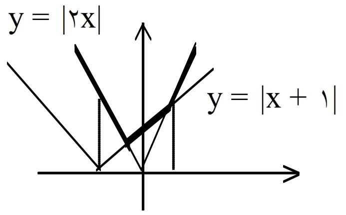
$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{۱}{\alpha^{۲}} + \frac{۱}{\beta^{۲}} = \frac{\alpha^{۲} + \beta^{۲}}{\alpha^{۲}\beta^{۲}} = \frac{\left(\frac{-۳}{۵}\right)^{۲} - ۲\left(\frac{-۲}{۵}\right)}{\frac{۴}{۲۵}} = \frac{۲۹}{۴} \\ P = \frac{۱}{\alpha^{۲}} \cdot \frac{۱}{\beta^{۲}} = \frac{۲۵}{۴} \end{array}\right\} x^{۲} - \frac{۲۹}{۴}x + \frac{۲۵}{۴} = ۰$$

$$\Rightarrow ۴x^{۲} - ۲۹x + ۲۵ = ۰ \Rightarrow k = ۲۹$$

راه حل خاص:

$$۵x^{۲} + ۳x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -۱ \Rightarrow \frac{۱}{\alpha^{۲}} = ۱ \Rightarrow ۴(۱) - k(۱) + ۲۵ = ۰ \Rightarrow k = ۲۹ \\ \beta = \frac{۲}{۵} \end{cases}$$

۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. نمودار سیاه همان تابع $f(x)$ است که کم‌ترین مقدار آن در تقاطع دو تابع در قسمت منفی است.



$$\xrightarrow{-۱<x<۰} -۲x = x+۱ \rightarrow x = -\frac{۱}{۳} \rightarrow f\left(-\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۲}{۳}$$

۱۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left(۱+\sqrt{۲}\right)^{۲n} = ۹۹+b\sqrt{۲} \qquad (۱)$$

$$\left(۳-۲\sqrt{۲}\right)^{n} = ۹۹-b\sqrt{۲} \Rightarrow \left(\left(\sqrt{۲}-۱\right)^{۲}\right)^{n} = ۹۹-b\sqrt{۲} \Rightarrow \left(\sqrt{۲}-۱\right)^{۲n} = ۹۹-b\sqrt{۲} \qquad (۲)$$

$$(۱)\times(۲) \Rightarrow (۲-۱)^{۲n} = ۹۹^{۲}-b^{۲}\times ۲ \Rightarrow ۲b^{۲} = ۹۹^{۲}-۱$$

$$\Rightarrow ۲b^{۲} = (۹۹-۱)(۹۹+۱) = ۹۸\times ۱۰۰ \Rightarrow b^{۲} = ۴۹\times ۱۰۰ \Rightarrow b = ۷\times ۱۰ = ۷۰$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{l} \alpha = \sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}-۴} \\ \beta = \sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}+۴} \end{array} \Rightarrow \left(\alpha^{۲}+\beta^{۲}-\alpha\beta\right)\left(\alpha^{۲}+\beta^{۲}+\alpha\beta\right) = \left(\alpha^{۲}+\beta^{۲}\right)^{۲} - \alpha^{۲}\beta^{۲}$$

$$= \alpha^{۴}+\beta^{۴}+۲\alpha^{۲}\beta^{۲}-\alpha^{۲}\beta^{۲} = \alpha^{۴}+\beta^{۴}+\alpha^{۲}\beta^{۲}$$

$$= \left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}-۴}\right)^{۴} + \left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}+۴}\right)^{۴} + \left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}-۴}\right)^{۲}\left(\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}+۴}\right)^{۲}$$

$$= ۳\sqrt{۲}-۴+۳\sqrt{۲}+۴+\sqrt{\left(۳\sqrt{۲}-۴\right)\left(۳\sqrt{۲}+۴\right)} = ۶\sqrt{۲}+\sqrt{۱۸-۱۶}$$

$$= ۶\sqrt{۲}+\sqrt{۲} = ۷\sqrt{۲}$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} a_n: ۲\,,\,۹\,,\,۱۶\,,\,۲۳\,,\,۳۰\,,\,۳۷ \\ b_n: ۱۲\,,\,۱۷\,,\,۲۲\,,\,۲۷\,,\,۳۲\,,\,۳۷ \end{cases} \rightarrow \text{اولین جمله مشترک}$$

$$d = [۵\,,\,۷] = ۳۵ \qquad \Rightarrow c_n = ۳۷+(n-۱)(۳۵) \Rightarrow c_n = ۳۵n+۲$$

$$۱۰۰ \leq ۳۵n+۲ < ۳۰۰ \Rightarrow ۹۸ \leq ۳۵n < ۲۹۸$$

$$\Rightarrow ۲/۸ \leq n < ۸/۵ \Rightarrow n = ۶$$

۱۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 1 \qquad (1)$$

$$S_4 = 3 \Rightarrow \frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q} = 3 \qquad (2)$$

$$(1) \div (2) \Rightarrow \frac{a_1(1 + q^2)}{\frac{a_1(1 - q^2)(1 + q^2)}{1 - q}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{1 + q} = \frac{1}{3} \Rightarrow q = 2$$

$$(1) : a_1 + a_1(2)^2 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{5}$$

$$S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{\frac{1}{5}(1 - 64)}{1 - 2} = \frac{63}{5} = 12/6$$

۱۴- یادآوری: x واسطه هندسی دو عدد a و b است به شرطی که $x = \sqrt{ab}$ و یا $x^2 = ab$ باشد. در این سؤال:

$$x^2 = (2^3 \times 5 \times 7^2) \times (2 \times 5^3 \times 11^2) = 2^4 \times 5^4 \times 11^2 \times 7^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2^2 \times 5^2 \times 11 \times 7 = 7700$$

گزینه‌ی ۱ جواب صحیح است.

۱۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n - 5}{3n + 2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \left|\frac{2n - 5}{3n + 2} - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{19}{3(3n + 2)} < \frac{1}{100} \Rightarrow 3(3n + 2) > 1900$$

$$\Rightarrow 3n + 2 \geqslant 633 \Rightarrow 3n \geqslant 631 \Rightarrow n \geqslant 211$$

۱۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی دنباله‌ی داده شده را ساده می‌کنیم، داریم:

$$a_n = \frac{n - 2}{4n} = \frac{n}{4n} - \frac{2}{4n} \longrightarrow a_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n}$$

حال با در نظر گرفتن $n > 31$ یا با طور دقیق‌تر $n \geqslant 32$، به ساختن جمله‌ی عمومی دنباله اقدام می‌کنیم:

$$n \geqslant 32 \longrightarrow 2n \geqslant 64 \longrightarrow 0 < \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{64} \longrightarrow 0 > -\frac{1}{2n} \geqslant -\frac{1}{64} \longrightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{4} - \frac{1}{64}$$

$$\longrightarrow \frac{15}{64} \leqslant a_n < \frac{1}{4}$$

روش دوم: در دنباله‌ی هموگرافیک به فرم کلی $\left\{\frac{an + b}{cn + d}\right\}$ اگر ریشه‌ی مخرج کوچک‌تر از عدد یک باشد $\left(n = \frac{-d}{c} < 1\right)$، آن‌گاه قطعا دنباله‌ی مذکور یکنواست (اکیدا یکنوا) و داریم:

الف) اگر $ad - bc > 0$ آن‌گاه دنباله اکیدا صعودی است.

ب) اگر $ad - bc < 0$ آن‌گاه دنباله اکیدا نزولی است.

با توجه به مطلب فوق دنباله‌ی $\left\{\frac{n - 2}{4n}\right\}$ اکیدا صعودی $(ad - bc = 0 + 8 > 0)$ و همگرا به $\frac{1}{4}$ می‌باشد و در نتیجه برای $n \geqslant 32$ داریم:

$$a_{32} \leqslant a_n < \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{15}{64} \leqslant a_n < \frac{1}{4}$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$a_1 = a_0\left(\cos\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2},\ a_2 = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4},\ a_3 = \cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}, \ldots$$

$$\Rightarrow a_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n} \Rightarrow a_n = \frac{\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^{n-1}}\ldots\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\frac{1}{2^n}\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\pi}$$

۱۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}$$

$$|a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2n+8}{3n+4} - \frac{2}{3}\right| < \frac{4}{100} \Rightarrow \frac{16}{3(3n+4)} < \frac{4}{100} \Rightarrow 3(3n+4) > 400 \Rightarrow 3n+4 > \frac{400}{3} \Rightarrow$$

$$n > 43/11 \Rightarrow n \geqslant 44 \Rightarrow n_0 = 44$$

۱۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

در این دنباله $a_1 = 2$ از جمله‌ی دوم به بعد:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \xrightarrow{n=2} a_2 = \frac{2}{3} \text{ و } q = \frac{2}{3}$$

دنباله به صورت روبه‌رو است: ... و $\frac{8}{27}$ و $\frac{4}{9}$ و $\frac{2}{3}$ و ۲ از جمله‌ی دوم به بعد تصاعد هندسی است:

$$S_\infty = 2 + \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2 + 2 = 4$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{|-1|^n}{n} = 0$$ همگراست

$a_1 = \frac{1}{2} \swarrow a_2 = \frac{4}{3} \searrow a_3 = \frac{3}{4} \Rightarrow$ دنباله نه صعودی است و نه نزولی.